

La teoría de la Auto Regresividad Separable. Una alternativa para
proyectar la esperanza de vida al nacimiento

Según la *Human Mortality Database*, existen 10 países que actualmente (2009) tienen las esperanzas de vida al nacimiento más altas de todo el planeta. De acuerdo con el ranking, el país con la expectativa de vida al nacimiento más alta en todo el mundo hoy día es Japón con 83.31 años, el segundo más alto es Suiza con 82.23 años, el tercero es Italia con 82.11 años, el cuarto Australia con 82.07 años y en quinto lugar está Suecia con 81.86 años. Los otros 5 son Islandia, Francia, Noruega, Netherlands y Nueva Zelanda.

El objetivo del artículo es presentar la *Teoría de la Auto Regresividad Separable* y aplicarla a las series históricas de estos diez países, en primer lugar, para estimar el valor de la estabilidad, y en segundo lugar, para obtener proyecciones de la esperanza de vida al nacimiento en algunos de estos diez países para el periodo 2010-20150.

De acuerdo con la evolución a través del tiempo de sus series históricas, estos países se clasifican según si han ocurrido periodos de estabilidad o no. Los países en los que se observan periodos de estabilidad son *Noruega, Netherlands, Nueva Zelanda, Australia, e Islandia*. Los países en los que no se observan periodos de estabilidad son *Francia, Suecia, Japón, Suiza e Italia*.

Una manera de estimar el valor en el que la esperanza de vida al nacimiento se estabilizará, es mediante la teoría de la *Auto Regresividad Separable*. Esta teoría supone la existencia de t observaciones de la esperanza de vida al nacimiento y_1, y_2, \dots, y_t , tal que la esperanza de vida al nacimiento en cualquier momento (y_t) depende de la misma esperanza de vida pero un año atrás (y_{t-1}), de la siguiente forma,

$$y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

tal que $\alpha > 0$ y $|\beta| < 1$ y ε_t es una variable aleatoria que se supone distribuida *Normal* con media cero y varianza constante σ^2 .

La teoría prueba que si los parámetros α y β cumplen las condiciones anteriores entonces cuando t tiende a infinito y_t tiende a la constante

$$\mathfrak{S} = \frac{\alpha}{(1-\beta)} \quad (2)$$

Por lo que \mathfrak{S} denota el valor en el que se estabilizará la esperanza de vida al nacimiento.

Para probar los resultados de la teoría se utilizaron las series históricas de *Dinamarca, Noruega, Bélgica, Netherlands, Nueva Zelanda e Island*, países en donde se han observado periodos de estabilidad. En el siguiente cuadro se pueden observar las estimaciones del valor de la estabilidad de la teoría y los valores reales observados en estos países.

Cuadro 2						
Valor de la estabilidad real y estimada en países donde ocurrió la estabilidad						
País	Inicio del periodo de estabilidad	Fin del periodo de estabilidad	Valor de la estabilidad real	Valor de la estabilidad estimada	Sesgo en años	Sesgo porcentual
Dinamarca	1956	1966	72.29	75.34	3.05	4.2191
Noruega	1955	1969	73.61	73.58	0.03	0.0408
Bélgica	1958	1968	70.5	69.8	0.7	0.9929
Netherlands	1960	1970	73.54	72.97	0.57	0.7751
Nueva Zelanda	1960	1970	71.25	70.78	0.47	0.6596
Australia	1960	1970	70.23	72.25	2.02	2.8763
Iceland	1955	1970	73.49	74.78	1.29	1.7553

Fuente: Cálculos del autor

Notas. El sesgo en años se calcula como el valor absoluto de la diferencia entre el valor de la estabilidad real y el estimado. El sesgo porcentual se calcula como el porcentaje que representa el sesgo en años con respecto al valor de la estabilidad real

Como se puede observar, las estimaciones tienen sesgos muy pequeños con respecto de los valores reales, lo que prueba que la teoría de la *Auto Regresividad Separable* es correcta.

En los países donde no se han observado periodos de estabilidad, se aplicó la teoría para predecir los valores de la estabilidad. Los resultados prueban que en Francia y Suecia la esperanza de vida

al nacimiento aún no ha empezado a estabilizarse por lo que no existen las condiciones para que se estabilice en el futuro. Por el contrario, en Japón, Suiza e Italia, la teoría prueba que la esperanza de vida ha empezado a estabilizarse y por lo tanto en estos países si se pudo calcular el valor de la estabilidad. De acuerdo con la teoría se espera que Japón se estabilice en 89.78 años, en tanto que Suiza e Italia se estabilizarán en 89.27 y 96.03 años respectivamente.

Ahora bien, si el valor de la estabilidad para la esperanza de vida al nacimiento en el futuro se conoce, entonces lo inmediato es aplicar este conocimiento para obtener proyecciones y poder determinar cómo se avanza año con año hasta llegar a la estabilidad. Para lograr esto, se necesita una función $f(t)$ que esté acotada por arriba precisamente por el valor de la estabilidad estimado.

Según la *Auto Regresividad Separable* la solución surge al resolver la siguiente ecuación diferencial de variables separables.

$$\frac{dy_t}{dt} = (\hat{k} - y_t)h(t) \quad (3)$$

Donde \hat{k} es el valor de la estabilidad estimado y $h(t)$ es una función integrable de t . Resolviendo la ecuación diferencial (3) se obtiene que $f(t)$ es,

$$y_t = \hat{k} - e^{-g(t)} \quad (4)$$

Nótese que si $g(t)$ crece cuando el tiempo tiende a infinito, entonces la exponencial de (4) tiende a cero y por lo tanto y_t tenderá al valor \hat{k} , es decir a la estabilización. Ahora bien, como y_t y \hat{k} son conocidos entonces la forma de $-g(t)$ se puede deducir de la siguiente ecuación,

$$\ln(\hat{k} - y_t) = -g(t)$$

Es decir la relación entre la variable $\ln(\hat{k} - y_t)$ y el tiempo t definirá la forma de la función $-g(t)$. De tal forma que al estimar los parámetros por mínimos cuadrados ordinarios se obtuvo que en Japón la relación entre la esperanza de vida al nacimiento y el tiempo es de la siguiente manera,

$$y_t = 89.78 - e^{3.4368 - 0.0249t} + \varepsilon_t \quad (5)$$

De acuerdo con el modelo (5) se espera que en 2020 la expectativa de vida en Japón llegue a los 84.73 años, para el 2030 a 85.84 años, para el año 2040 a 86.71 y para el año 2050 la longevidad llegará a 87.39 años, a tan solo 2.39 años de alcanzar la estabilidad.

En Suiza la relación entre la esperanza de vida al nacimiento y el tiempo quedó definida como,

$$y_t = 89.27 - e^{3.8917 - 0.0073t - 0.00005t^2} + \varepsilon_t \quad (6)$$

Asignando valores al tiempo en (6) se obtuvieron proyecciones de la esperanza de vida al nacimiento en Suiza para el periodo 2010-2050. De esta forma, según el modelo (6) para el año 2020 Suiza tendrá una esperanza de vida de 83.20 años, para 2030 de 84.41 años, para 2040 de 85.41 y para el año 2050 llegará a los 86.24 años, tan solo a 3.02 años de la estabilidad.

En Italia la ecuación que relaciona la esperanza de vida al nacimiento y el tiempo es,

$$y_t = 96.03 - e^{4.176 - 0.005t - 0.00005t^2} + \varepsilon_t \quad (7)$$

Al darle valores al tiempo en (7) se obtuvieron proyecciones de la esperanza de vida al nacimiento en Italia para el periodo 2010-2050. De acuerdo con el modelo, se espera que en el año 2020 la esperanza de vida al nacimiento en Italia sea de 85.64 años, en 2030 de 87.37, en 2040 de 89.18 y para el año 2050 se espera que llegue a los 90.55 años, todavía muy lejos de la estabilidad que es de 96.03 años.

Finalmente, es importante mencionar que las estadísticas para validar el ajuste de los diferentes modelos que se usan en el artículo, indican que éstos explican de manera adecuada las series históricas observadas, por lo que se concluye que la teoría *Auto Regresiva Separable* representa una nueva alternativa para proyectar la esperanza de vida al nacimiento.